CHOIX SOCIAUX ET THÉORIE DES JEUX : RÉSULTATS RÉCENTS D'UNE APPROCHE TOPOLOGIQUE

par

Graciela CHICHILNISKY (*)

Université d'Essex et Université de Columbia

Grâce à la topologie algébrique, nous avons pu obtenir une série de résultats aussi bien en théorie du choix social qu'en théorie de jeux. Cette nouvelle approche permet dans le domaine du choix social d'éclairer les théorèmes d'impossibilité et d'en trouver de nouveaux, de caractériser topologiquement les ensembles de préférences individuelles résolvant le paradoxe de Condorcet. En théorie des jeux, nous mettons en évidence les liens existant entre la non manipulabilité de certains jeux, leur inéquité et l'existence de leurs équilibres de Nash. Ces résultats sont appliqués aux duopoles de Cournot et de Stackleberg.

1. INTRODUCTION

Ce papier présente un bref aperçu de récents résultats obtenus dans les théories des jeux et du choix social et met en particulier l'accent sur les utilisations et développements d'outils de topologie algébrique et différentielle dans ces domaines. Notre but est d'exposer : nous n'essayons ni de fournir les démonstrations complètes dont nous donnons les références correspondantes ni de passer en revue les résultats antérieurs qui forment une grande partie de la littérature dans ces domaines.

L'objectif est de fournir un guide qui oriente vers les récents résultats à l'aide d'une suite d'exemples économiques de nature géométrique, et d'indiquer des directions de recherche potentiellement gratifiantes. L'utilisation

---

(1) Cette recherche fut financée en partie par le Projet UNITAR Technology, Distribution and NORTH-SOUTH Relations, et en partie par NSF Grant SES 7914050.

Je remercie G. Heal, C. Henry, J.M. Larsry et M. Vergne pour leurs remarques et commentaires, et G. Demange pour la traduction française.

d'outils topologiques en analyse économique a une longue tradition qui remonte au travail de Von Neumann sur la croissance économique balancée de 1937 et 1945, travail dans lequel il démontrait une généralisation du théorème de point fixe de Brower qui fut à la base du théorème de Kakutani. En théorie des jeux aussi bien que dans l'analyse de l'équilibre général de marché, les méthodes de point fixe ont constitué les outils les plus largement utilisés pour démontrer l'existence de solutions ; elles représentent en fait la plus grande partie des applications actuelles de la topologie algébrique à l'économie (1). Par contre, la théorie du choix social a reposé jusqu'ici essentiellement sur des méthodes combinatoires à l'instar des premiers travaux d'Arrow [1] et de Black [2]. Cependant, comme je le montrerai dans la suite, beaucoup de problèmes de la théorie du choix social et de la théorie des jeux ont, s'ils sont formulés de façon appropriée, une structure topologique intrinsèque qui peut être examinée avec fruit grâce à des méthodes et des outils de topologie algébrique dépassant les théorèmes de point fixe. Ceci permet de tirer parti de toute la richesse des techniques existantes aussi bien que de développer de nouveaux outils.

Je considérerai en théorie du choix social les paradoxes du choix social et leur relation aux théorèmes de point fixe, l'équivalence entre la condition de Pareto et l'existence d'un dictateur, la règle des majorités décisives, enfin des conditions nécessaires et suffisantes à la résolution des paradoxes et leur équivalence topologique avec les conditions classiques de «single-peakedness» de Black.

Dans le domaine de la théorie des jeux, je résume des résultats sur la manipulabilité de quelques environnements économiques et sur l'existence d'équilibres de Nash. Je montre que la manipulabilité de certains jeux correspond topologiquement à un paradoxe du choix social. Des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'équilibres de Nash (c'est-à-dire non coopératifs) sont données en termes d'inéquité de certains jeux ; ce concept d'inéquité traduit l'inégale opportunité offerte aux joueurs de manipuler le jeu. Les modèles de duopole de Cournot et de Stackelberg sont brièvement discutés dans ces dernier cas.

---

(1) Dans certains travaux récents sur l'équilibre général, des méthodes de topologie différentielle sont employées telles que les théorèmes de transversalité de Sard et Thom afin de démontrer certaines propriétés génériques de régularité de l'équilibre, voir par exemple Debreu [19], Smale [28], Chichilnisky [4] ; d'autres récents résultats utilisent des théorèmes d'index pour étudier l'existence et la stabilité des équilibres. Cependant ces travaux font considérablement appel à la différentiabilité et ne sont donc pas de nature purement topologiques où seules des propriétés de continuité sont exigées comme dans les théorèmes de point fixe. De façon générale, une propriété est dite topologique si elle se conserve lors de déformation continue des objets considérés.

2. CHOIX SOCIAL

La théorie du choix social se propose de fournir des méthodes rationnelles et décisions collectives lorsque les individus ont des opinions diverses. Le vote est un moyen évident pour les sociétés d'aggréger les préférences des individus en une préférence collective.

Un vote à la majorité peut être en contradiction avec certains critères de rationalité des préférences comme par exemple la transitivité du choix social ; ce phénomène connu depuis longtemps est habituellement appelé les «paradoxe du vote» ou l'effet Condorcet. Condorcet le nota le premier en 1785 dans son livre sur la théorie des élections. La théorie générale des élections devient un champ fertile à partir des travaux de Black en 1948 et 1949 et de la monographie d'Arrow en 1951. Arrow énonça, d'une manière formelle, un ensemble de critères apparemment raisonnables d'imposer à un choix social et démontra leur incompatibilité. On peut formaliser le problème de la façon suivante : la procédure de vote prend en compte seulement les comparaisons, appelées préférences ordinales, des individus entre les alternatives au lieu de considérer aussi les intensités des préférences entre les alternatives, appelées préférences cardinales : ceci est à la source des paradoxes du choix social. En effet pour les espaces de préférences représentés par des espaces de fonctions d'utilité (qui sont des espaces linéaires) aucun problème n'existe donc pour additionner ces préférences de façon satisfaisante. En particulier, les espaces linéaires sont topologiquement triviaux. Par contre, les espaces des préférences ordinales n'ont pas une structure topologique triviale. Ils ne sont pas structurables en espaces linéaires et donc l'addition des préférences ordinales n'est pas possible. En fait nous montrerons dans ce papier qu'on ne peut pas non plus structurer ces espaces à l'aide d'une déformation continue d'une structure linéaire. Le problème est donc topologique car il ne dépend pas des déformations continues de l'objet considéré. La nature topologique du problème de choix social dans certains cas particuliers sera mise en évidence par les résultats présentés ici, comme par exemple la non existence de règles continues d'aggrégation respectant l'anonymité et l'unanimité. Je montrerai comment cette dernière question est reliée à un théorème de point fixe. Après l'étude d'autres propriétés je résumerai certains résultats qui montrent que la «trivialité topologique» (c'est-à-dire la contractibilité) de l'espace des préférences est en fait une condition nécessaire et suffisante à l'élimination des paradoxes.

Les problèmes de choix social étudiés dans cette partie sont semblables aux problèmes de sélection d'un vecteur de biens publics. Ils se prêtent donc d'eux-mêmes à une représentation dans des espaces euclidiens. Nous considérons un *espace d'alternatives* X, contenu dans l'orthant positif de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire dans l'ensemble $\mathbb{R}^{n+}$ des vecteurs à n composantes positives. L'espace X est ici un cube dans $\mathbb{R}^n$. On pourrait aussi choisir des espaces d'alternatives plus généraux dans des espaces euclidiens ; mais les résultats donnés sont de nature topologique et donc sont aussi valables pour tout espace topologiquement équivalent à un cube de $\mathbb{R}^n$.

Dans tout l'article nous utiliserons les notations de [11] auquel le lecteur peut se référer. Une *préférence p* est un champ de vecteurs sur l'espace des alternatives X, C^1 est localement intégrale (1). Pour toute alternative x de X, $p(x)$ est normal aux surfaces d'indifférence de la préférence p en x. p est normalisé en tout point si bien que $\|p(x)\| = 1 \; \forall x \in X$, voir figure 1 ci-dessous. P représente l'*espace des préférences* sur X.

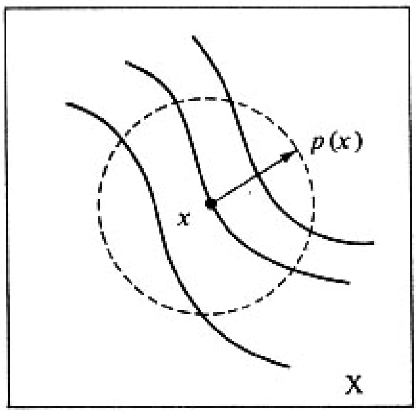


Fig. 1. – Une préférence C^1 sur $\mathbb{R}^2$: $p(x)$ est le vecteur gradient en l'alternative x.

Une *règle de choix social* ϕ est donc une application qui associe une préférence collective à tout k-uple de préférences individuelles, c'est-à-dire,

$$\phi : P^k \to P$$

où k est le nombre des votants. L'espace produit P^k est appelé l'*espace des profils* des préférences individuelles. La continuité de ϕ est définie par rapport à la topologie usuelle (C^1 sup) sur les champs de vecteurs C^1 ; notez que, pour cette topologie, la proximité des préférences entraîne la proximité des surfaces d'indifférence.

L'*anonymité* est définie par la condition

$$\phi(p_1, \ldots, p_k) = \phi(p_{\eta_1}, \ldots, p_{\eta_k})$$

(1) C'est-à-dire, un champ de vecteurs qui admet un prolongement C^1 sur un voisinage de X et qui est localement le champ des gradients d'une fonction C^1.

où η est n'importe quelle permutation de l'ensemble des entiers $\{0, \ldots, k\}$. Le *respect de l'unanimité* signifie que, lorsque tous les votants ont la même préférence, l'image par ϕ est aussi cette préférence, c'est-à-dire :

$$\phi(p, \ldots, p) = p.$$

ϕ est *Pareto* si $\phi(p_1, \ldots, p_k)$ préfère l'aternative x à une autre y dès que x est préférée à y par toutes les préférences du profil $(p_1, \ldots, p_k)$. ϕ est *dictatoriale* (de dictateur d) si $\phi(p_1, \ldots, p_k) \equiv p_d$ pour un $d \in \{1, \ldots, k\}$. La condition de respect de l'unanimité est plus faible que la condition de Pareto, alors que l'anonymité est plus forte que la non dictature.

Pour simplifier la présentation, je considère maintenant un cas particulier : les préférences sont linéaires (c'est-à-dire sont les champs de gradients de fonctions d'utilité linéaires), les votants sont au nombre de deux et l'espace des alternatives X est de dimension deux. Les résultats généraux seront aussi énoncés et les références correspondantes données. Comme je l'explique dans [9], dans le cas particulier considéré maintenant, $P = S^1$ où S^1 est le cercle (de dimension 1) de R^2 ; l'espace des profils avec deux votants est donc l'espace produit $P \times P = S^1 \times S^1$, appelé aussi le tore à deux dimensions, voir figure 2 ci-dessous.

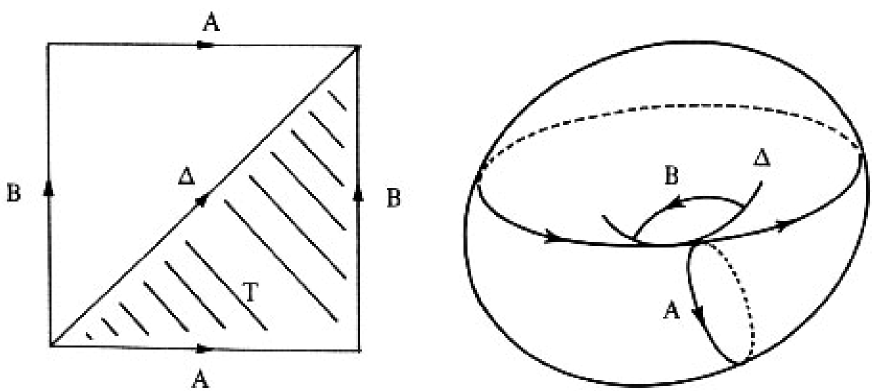


Fig. 2. – L'espace des profils des préférences linéaires sur R^2, avec deux votants.

Dans la suite, D représentera le disque unité, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, et ∂D sa frontière, le cercle S^1.

$P \times P = S^1 \times S^1$ est le même espace que le carré unité lorsque l'on identifie les points des côtés opposés comme dans la partie droite de la figure. A est l'ensemble $\{(p, p_0) : p \in S^1\}$ et $B = \{(p_0, p) : p \in S^1\}$. La frontière du triangle T est la réunion de la diagonale Δ avec A et B, $\partial T = \Delta \cup A \cup B$;

cette frontière peut aussi être représentée par les trois cercles reliés par un point comme dans la figure 3 ci-dessous.

Nous avons maintenant besoin de deux définitions de base de la topologie algébrique. Un espace X est dit *contractible* (ou topologiquement trivial) s'il peut être déformé continument en un de ses points, c'est-à-dire s'il existe une application continue $f: X \times [0, 1] \to X$ telle que

$$f(x, 0) = x \ \forall x \in X$$

et

$$f(x, 1) = x_0 \text{ pour un } x_0 \text{ de } X$$

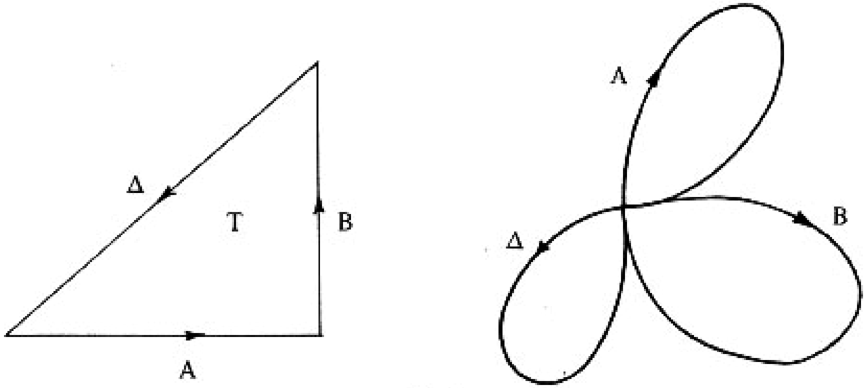


Fig. 3

Le *degré* d'une application continue $f: S^1 \to S^1$ noté deg (f) peut être compris comme le nombre de fois où $f(S^1)$ recouvre S^1. Par exemple si f est la fonction identité, deg $(f) = 1$; si $f(p) = 2p$ (en radians) deg $(f) = 2$; si $\{f(S^1)\}$ n'est pas égal à S^1, deg $(f) = 0$. Si une fonction f change l'orientation (par exemple $f(x) = -x$) alors deg (f) est négatif. Voir dans [13] une définition complète du degré d'une fonction.

a) Paradoxes du choix social et théorèmes de point fixe

La généralisation du résultat suivant est valable pour toutes les préférences (non nécessairement linéaires), tout nombre (fini) de votants et tout espace d'alternatives de dimension finie, voir Chichilnisky [11].

Théorème 1

Il n'existe pas de règle de choix social $\phi: P \times P \to P$ *continue anonyme et respectant l'unanimité.*

Dans le cas particulier considéré, on peut donner une démonstration géométrique simple.

Soit Δ la diagonale, $\Delta = \{(p_1, p_2) \in P \times P : p_1 = p_2\}$.

L'ensemble Δ étant équivalent au cercle S^1 nous pouvons définir le degré de ϕ restreinte à Δ, $\phi/\Delta : \Delta \to S^1$, ϕ respecte l'unanimité donc $\phi(p, p) = p$ et

$$\deg(\phi/\Delta) = 1 \tag{1}$$

Nous pouvons aussi définir le degré de la restriction de ϕ aux ensembles $A = (p_0 \times S^1)$ et $B = (S^1 \times p_0)$ puisque tous deux sont équivalents à des cercles. La condition d'anonymité implique

$$\deg(\phi/A) = \deg(\phi/B) \tag{2}$$

Le cercle Δ peut être continument déformé dans $S^1 \times S^1$ en la réunion des cercles A et B (voir fig. 3) ; il s'ensuit que le degré de ϕ sur Δ doit être égal au degré de ϕ sur la réunion $A \cup B$ (voir aussi [9]) ;

$$\deg(\phi/\Delta) = \deg(\phi/A \cup B) \tag{3}$$

D'autre part, le degré de ϕ sur la réunion $A \cup B$ est égal à la somme des degrés de ϕ sur A et sur B car A et B sont des cercles :

$$\deg(\phi/A \cup B) = \deg(\phi/A) + \deg(\phi/B) \tag{4}$$

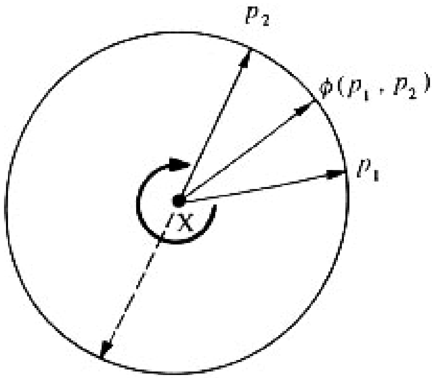
De (1), (2), (3) et (4) nous obtenons une contradiction puisque ces équations impliquent que un est un nombre pair. Ainsi, aucune règle continue ne respecte à la fois l'anonymité est l'unanimité.

Exemples : Nous expliquons maintenant pourquoi deux candidats apparemment naturels à une telle règle ϕ ne satisfont pas en fait toutes les conditions. La discussion repose ici sur l'hypothèse de non saturation des préférences dans l'intérieur $\mathring{X}$ de l'espace des alternatives. Nous examinons dans [5] et [8] des cas où des points de saturation existent dans $\mathring{X}$. Soient p_1 et p_2 deux vecteurs de S^1 et $\phi(p_1, p_2)$ le vecteur unité de direction déterminée par la moitié de la distance angulaire entre les deux vecteurs p_1 et p_2, voir figure 4 page suivante.

Maintenant, faisons tourner l'extrémité de p_1 le long du cercle S^1 dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de p_2. Lorsque p_1 tend vers p_2 à la fin de la rotation, $\phi(p_1, p_2)$ doit tendre vers $p_3 = -p_2$ par définition de ϕ. Cependant, $\phi(p_1, p_2)$ devrait aussi tendre vers p_2, lorsque p_1 tend vers p_2 si ϕ était continue et respectait l'unanimité. Ainsi cette règle ne satisfait pas toutes les conditions. Un problème semblable arriverait si la règle associait à (p_1, p_2) la moitié de la plus grande distance angulaire entre p_1 et p_2.

Une autre règle d'aggrégation pourrait être celle donnée par l'addition des deux vecteurs p_1 et p_2 puis par la normalisation de la somme obtenue,

$$(p_1, p_2) \to \frac{p_1 + p_2}{\|p_1 + p_2\|} \quad .$$



$$p_3 = \phi(p_2, \lim_{p_1 \to p_2} p_1)$$

Fig. 4

Cependant cette règle pose plusieurs problèmes. D'abord l'image de ϕ peut violer la condition de définition d'une préférence ; elle n'est pas toujours une préférence continue linéaire non nulle dans $\mathring{X}$, c'est-à-dire un vecteur de $S^1/0$, par exemple si $p_2 = -p_1$. Mais de plus, même si la saturation complète des préférences dans $\mathring{X}$ est admise comme dans [5], d'autres problèmes se posent si les préférences ne sont pas nécessairement linéaires, voir [5]. En particulier, même si p_1 et p_2 sont des champs de vecteurs localement intégrables, le champ de vecteurs $q(x)$ associé par cette règle : $\forall x \in X,\ q(x) = \dfrac{p_1(x) + p_2(x)}{\| p_1(x) + p_2(x) \|}$ *n'est pas* en général un champ de vecteurs intégrable sur X. On le vérifie aisément car même si p_1 et p_2 satisfont les conditions d'intégrabilité de Frobenius, $q(x)$ ne les satisfait en général pas, à moins que $p_1(x)$ et $p_2(x)$ soient constants, c'est-à-dire les préférences individuelles linéaires. Une telle règle ne peut donc pas définir une application de P^k dans P puisque son image n'est pas dans P, ni même dans tout autre espace de préférences (localement ou globalement) intégrables, voir [5].

Des problèmes analogues se posent lorsque l'on cherche une règle continue d'aggrégation satisfaisant (2) et (3) pour un espace d'alternatives de dimension trois ou plus, mais les visualiser n'est pas aussi facile qu'en dimension deux.

Maintenant, je vais parler brièvement du lien entre le paradoxe et les théorèmes de point fixe. Le résultat suivant est démontré dans [9].

Théorème 2

L'existence d'une règle de choix social continue, anonyme et qui respecte l'unanimité comme dans le théorème 1 est équivalente à l'existence d'une fonction continue, sans point fixe, du disque D dans lui-même.

L'idée sous-jacente à ce résultat est simple. On prouve d'abord que le paradoxe de choix social du théorème 1 équivaut au problème du prolongement d'une certaine fonction continue g définie sur la frontière ∂D du disque D à valeur dans ∂D $g : \partial D \to \partial D$, en une autre fonction f de tout le disque D dans ∂D ; $f : D \to \partial D$. Le problème est donc l'existence d'une application continue $f : D \to \partial D$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "f"] & \\ \partial D \arrow[u, "\text{inc.}"] \arrow[r, "g"'] & \partial D \end{tikzcd} \tag{5}$$

L'équivalence entre le paradoxe et le problème de prolongement de (5) s'exprime ainsi : si T est le triangle de $\mathbf{P} \times \mathbf{P}$ indiqué dans la figure 3, $\mathring{T}$ est équivalent au disque $\mathring{D}$ et la frontière ∂D correspond à $\partial T = \Delta \cup A \cup B$. Notez que sur T les conditions imposées à la règle de choix social ϕ se traduisent par des restrictions sur le comportement de ϕ seulement sur Δ, A et B ; en effet l'anonymité se traduit par $\phi/A = \phi/B$ et le respect de l'unanimité par $\phi/\Delta = id/\Delta$. De plus, on voit aisément qu'une fonction continue $g : \partial T \to S^1$ respectant l'unanimité et l'anonymité existe *toujours*. Soit, par exemple $g/\Delta(p, p) = p$ et $g/B = g/A = p_0$ si $\Delta \cap A \cap B = (p_0, p_0)$. Le paradoxe du choix social est résolu si et seulement si une telle fonction peut être prolongée en une fonction $f : T \to S^1$ puisqu'une telle f entraînerait l'existence d'une fonction $\phi : S^1 \times S^1 \to S^1$ satisfaisant toutes les propriétés requises. Ainsi la solution du paradoxe correspond à l'existence d'un prolongement continu d'une fonction $g : \partial D \to \partial D$ (comme dans (5)). Mais un tel prolongement de $g : \partial D \to \partial D$ en $f : D \to \partial D$ existe si et seulement si $\deg(g) = 0$ ce qui est équivalent (voir [9]) au théorème du point fixe de Brouwer. Cette dernière remarque met donc en lumière la relation entre le paradoxe et le théorème de point fixe.

b) Equivalence topologique entre la condition de Pareto et l'existence d'un dictateur

Les théorèmes 1 et 2 montrent que le paradoxe apparait parce que les propriétés apparemment naturelles d'anonymité et de respect d'unanimité sont topologiquement en contradiction. Elles sont de manière évidente reliées aux propriétés plus traditionnelles qui furent à la base du théorème d'Arrow : *l'absence de dictature et la condition de Pareto*. Cependant, les axiomes du théorème d'Arrow ne sont pas comparables aux conditions d'anonymité et de respect d'unanimité, car Pareto est clairement plus forte que l'unanimité alors que l'absence de dictature est plus faible que l'anonymité. De plus, un autre axiome quelque peu controversé est imposé dans le paradoxe d'Arrow : l'axiome d'indépendance des alternatives irrélevantes(¹), alors qu'ici la continuité est exigée à la place. Une question naturelle est donc de savoir si, malgré ces différences, le paradoxe étudié par Arrow a aussi une structure topologique. Je vais indiquer maintenant que la condition Pareto est en fait topologiquement équivalente à l'existence d'un dictateur et ainsi la nature topologique des paradoxes plus traditionnels sera mise en évidence. Cela établira de plus que l'axiome controversé d'Arrow d'indépendance des alternatives irrélevantes n'est pas nécessaire à l'existence d'un paradoxe. Ce dernier axiome peut être considéré comme un moyen de réduire à trois alternatives seulement le problème et ainsi de pouvoir appliquer le paradoxe de Condorcet. Un commentaire plus poussé sur les domaines de préférences peut être utile ici. Même si le paradoxe d'Arrow apparait en principe s'appliquer aux préférences monotones (non pas comme notre théorème 1) ce n'est pas en fait le cas grâce à l'axiome d'indépendance(²). Voir aussi la discussion dans [5].

Les résultats donnés ci-dessous sont des cas particuliers de ceux de [14] qui prouvent l'équivalence topologique entre les règles vérifiant Pareto et les règles dictatoriales, ceci quels que soient la dimension de l'espace des alternatives, les préférences C^1 et le nombre des votants. La démonstration de ce résultat fait appel à la topologie algébrique. Une définition est tout d'abord nécessaire. Une règle ϕ est dite *topologiquement équivalente* à une autre $\widetilde{\phi}$ s'il existe une déformation continue de ϕ en $\widetilde{\phi}$, c'est-à-dire une application continue

$$\pi : \mathrm{P} \times \mathrm{P} \times [0, 1] \to \mathrm{P} \text{ telle que}$$

$$\pi(p_1, p_2, 0) = \phi(p_1, p_2)$$

$$\pi(p_1, p_2, 1) = \widetilde{\phi}(p_1, p_2) \qquad \forall (p_1, p_2) \in \mathrm{P} \times \mathrm{P}$$

Nous examinons maintenant la conséquence topologique de la condition Pareto. Si p_1 et p_2 sont deux préférences dans P, l'ensemble des alternatives que p_1 et p_2 *tous deux* préfèrent à x (voir fig. 5) est le *cône dual D* de (p_1, p_2), c'est-à-dire l'ensemble $\{q \in S^1 : (q \cdot p_1) \geqslant 0 \text{ et } (q \cdot p_2) \geqslant 0\}$. La condition Pareto signifie que la préférence sociale $\phi(p_1, p_2)$ préfère toutes ces alternatives à x, donc ϕ est Pareto si et seulement si

$$\phi(p_1, p_2) \in \{q \in S^1 : (q \cdot r) \geqslant 0 \quad \forall r \in D\}$$

(1) L'axiome d'*indépendance des alternatives irrélevantes* impose à la préférence collective sur *tout sous-ensemble* d'alternatives de ne dépendre que des préférences individuelles restreintes à *ce sous-ensemble* et non pas aussi des préférences individuelles sur des alternatives extérieures à ce sous-ensemble.

(2) En effet la démonstration du paradoxe d'Arrow repose sur l'existence d'un «triplet de Condorcet». Ce besoin, et l'axiome d'indépendance entraîne que le domaine des préférences où le paradoxe d'Arrow s'applique consiste en fait de préférences non monotones, voir [5].

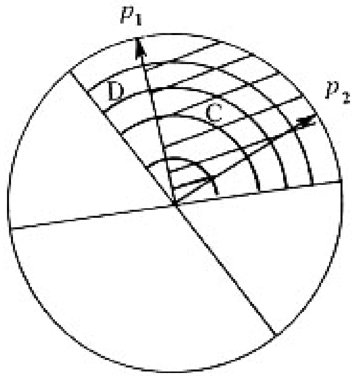


Fig. 5. – L'ensemble hachuré de lignes circulaires est le cône dual D de (p_1, p_2). L'ensemble rayé est le cône engendré par p_1 et p_2, i.e. $C(p_1, p_2)$.

ou encore si et seulement si $\phi(p_1, p_2)$ appartient au *dual* du cône dual de p_1, p_2 qui est précisément le cône engendré par p_1 et p_2 noté $C(p_1, p_2)$. On peut alors montrer que, si ϕ est Pareto, son degré sur les ensembles :

$$A = \{(p, q) \in S^1 \times S^1 : q = p_0\}$$

et

$$B = \{(p, q) \in S^1 \times S^1 : q = p_0\}$$

(qui sont tous les deux des cercles) doit être positif et au plus égal à 1. En effet, lorsque p varie dans S^1, l'issue $\phi(p_0, p)$ est dans le cône $C(p_0, p)$. Ceci implique en particulier que, lorsque la seconde préférence p varie dans S^1 et la première reste en p_0 alors l'issue $\phi(p_0, p)$ ne peut parcourir tout S^1 que si p l'a elle-même parcouru. Ainsi, le degré de ϕ restreinte à B est au plus égal à 1 et clairement il ne peut pas être négatif. Le même résultat est valable pour le degré de ϕ sur A. De plus, comme nous le montrons dans la suite, les degrés de ϕ sur A et sur B ne peuvent pas être simultanément égaux à 1 lorsque ϕ est Pareto. En effet d'après le prochain théorème 3, si ϕ est Pareto, ϕ est topologiquement équivalente à une règle dictatoriale. Le degré d'une application ne dépend que de sa classe d'équivalence topologique. Une règle dictatoriale est évidemment de degré 0 sur l'un des ensembles A et B et 1 sur l'autre ; par conséquent son degré sur $A \cup B$ est 1. Ceci reste vrai pour les règles Pareto puisqu'elles sont équivalentes à des dictatoriales (théorème ci-dessous) : comme d'autre part

$$\deg(\phi/A \cup B) = \deg(\phi/A) + \deg(\phi/B)$$

un seul des degrés ($\deg \phi/A$ ou bien $\deg \phi/B$) est égal à 1 et l'autre est nécessairement nul lorsque ϕ est Pareto.

Théorème 3

Si $\phi : P \times P \to P$ *est Pareto, elle est topologiquement équivalente à une règle dictatoriale.*

Démonstration :

Soient p_1 et $-p_1$ deux vecteurs diamétralement opposés de S^1. La condition Pareto et la continuité de ϕ impliquent

$$\text{soit} \quad \phi(p_1, -p_1) = p_1, \quad \text{soit} \quad \phi(p_1, -p_1) = -p_1$$

Sans restreindre la généralité, supposons $\phi(p_1, -p_1) = p_1$. Par continuité, nous avons donc $\phi(p_2, -p_2) = p_2$ pour tout p_2 de S^1. De plus, par la continuité et la condition Pareto, $\phi(p_1, q)$ est distinct de $-p_1$ pour tout q de S^1, $q \neq -p_1$ puisque $\phi(p_1, q)$ doit appartenir au cône $C(p_1, q)$ si (p_1, q) engendre un cône, c'est-à-dire si q est distinc de $-p_1$. Ainsi, pour tout p_1 de S^1, $\phi(p_1, q) \neq -p_1, \forall q \in S^1$. Soit alors $\pi : P \times P \times [0, 1] \to P$ définie par

$$\pi(p_1, p_2, t) = \frac{t(p_1) + (1-t)\,\phi(p_1, p_2)}{\| t(p_1) + (1-t)\,\phi(p_1, p_2) \|}$$

D'après les remarque précédentes, le dénominateur ne s'annule jamais, donc π est bien définie et évidemment continue.

De plus, $\pi(p_1, p_2, 0) = \phi(p_1, p_2)$

et $\pi(p_1, p_2, 1) = p_1$, donc π définit une déformation de ϕ en une règle dictatoriale (le premier votant est le dictateur dans notre cas).

Ce résultat est un cas particulier du résultat général obtenu dans [14] où l'on montre que toute règle Pareto (pour tout nombre $k \geqslant 2$ et tout nombre de biens $n \geqslant 2$) correspond à une projection (c'est-à-dire une règle dictatoriale sous certaines conditions. Le résultat est aussi démontré dans [14] pour des préférences C^1 quelconques (non nécessairement linéaires).

La figure 6 ci-dessous donne l'exemple d'une règle de choix social définie pour deux agents, des préférences linéaires et un espace des alternatives de dimension 2, $\phi : S^1 \times S^1 \to S^1$. La courbe dessinée sur la partie gauche de la figure 6 représente $\phi^{-1}(\bar{p})$, l'image réciproque par ϕ de la valeur $\bar{p}$ de S^1. Sous des hypothèses de différentiabilité continue et de régularité de ϕ, cette courbe est une variété de $S^1 \times S^1$. Notez alors que tout point $\bar{p}$ de S^1 est atteint exactement deux fois quand (p, q) parcourt A et B. Par conséquent $\deg(\phi/A) = 2$ et ϕ n'est pas Pareto d'après les résultats précédents ; elle n'est pas non plus déformable en une règle dictatoriale.

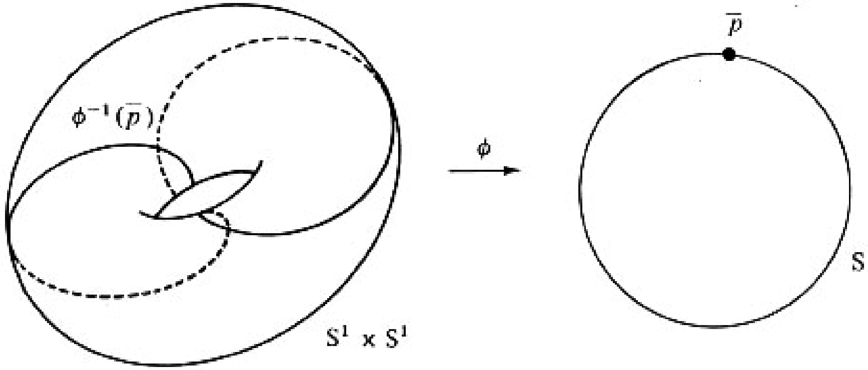


Fig. 6

c) Règles de majorité décisive

On dit qu'une règle de choix social vérifie une *condition de majorité décisive* dès que l'issue choisie coïncide avec la préférence de la majorité dans le cas très particulier suivant : les agents forment deux groupes homogènes, les individus d'un même groupe dont tous la même préférence et les préférences des deux groupes sont diamétralement opposées. ϕ est donc une règle de majorité décisive si pour tout profil $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ des agents tel que $p_i = p$ ou $p_i = -p$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ alors

$$\phi(p_1, \ldots, p_k) = p$$

si le nombre des agents de préférence p est supérieur au nombre des agents de préférence $-p$.

La règle de majorité satisfait clairement à la condition de majorité décisive, la réciproque est fausse car la condition de majorité décisive est nettement plus faible que celle de la majorité. Par exemple, si toutes les préférences $p_1, \ldots, p_k$ des votants sont distinctes mais si tous préfèrent une alternative x à une autre y, la condition de majorité implique que $\phi(p_1, \ldots, p_k)$ préfère x à y alors que la condition de majorité décisive n'impose rien dans ce cas ; autrement dit $\phi(p_1, \ldots, p_k)$ peut très bien préférer y à x car la condition de majorité décisive est seulement contraignante pour des préférences identiques à l'intérieur de deux groupes d'agents, et diamétralement opposées entre les deux groupes, *sur tous les choix possibles dans* X.

La continuité des règles de choix social par rapport aux préférences individuelles peut être interprétée comme une condition de stabilité structurelle ; en effet elle impose qu'une petite variation des données du problème (c'est-à-dire des préférences individuelles) ne produise pas des variations désordonnées de l'issue. Puisque les préférences C^1 sont des *fonctions* de l'espace des alternatives X à valeur dans $\mathbf{R}^n$, la condition de continuité sur la règle de choix social correspond à la notion, fréquemment utilisée en physique mathématique, de stabilité structurelle des applications définies sur des espaces de fonctions. Cette notion correspond, grâce à un choix convenable de la topologie, à celle de stabilité de Liapounov souvent utilisée en économie.

Théorème 4

Toute règle de choix social vérifiant la condition de majorité décisive est structurellement instable.

Voir dans [13] une démonstration de ce théorème.

Nous en déduisons le corollaire suivant

Corollaire 5

Les règles de majorité sont structurellement instables.

d) Intensité des préférences et les fonctions d'utilité de von Neumann-Morgenstern

Jusqu'à présent les résultats que nous avons présentés étaient valables pour des préférences ordinales, données par des champs de vecteurs $p(x)$ normalisés en chaque alternative x, *i. e.* $\| p(x) \| = 1$. Une telle préférence permet seulement de ranger les alternatives par ordre, mais ne permet pas de mesurer l'intensité des préférences parmi les alternatives. Il est donc naturel de s'interroger si les résultats s'étendent à des préférences plus générales, par exemple dans le cas où on peut exprimer que la différence de l'intensité de préférences de b à a est supérieure à l'intensité de c à a. Pour pouvoir considérer de tels cas plus généraux, nous étudions dans [8] des préférences cardinales. Une *préférence cardinale* est donnée par un ordre des utilités des alternatives, qui est invariant par les transformations linéaires positives, et seulement par elles. De telles préférences permettent d'exprimer précisément l'idée de l'intensité des préférences entre des choix. Les préférences cardinales ont été étudiées dans la littérature ; pour des références, voir [8]. Dans le cas d'un choix avec risque, les préférences cardinales coïncident avec les utilités de von Neumann-Morgenstern sur l'ensemble des événements incertains, comme nous l'avons montré en [8]. Des résultats sur l'agrégation des préférences cardinales sont donc valables pour l'agrégation des préférences avec risque.

Contrairement aux précédents résultats, nous allons considérer maintenant des ensembles discrets de choix d'alternatives, soit finis, soit dénombrables. Dans le cas d'un ensemble fini de choix $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on montre dans [8] que l'ensemble des préférences cardinales non nulles est formellement équivalent à l'ensemble :

$$R = \{(p_1, \ldots, p_n) \text{ tel que } 0 \leqslant p_i \leqslant 1 \; \forall i,$$
$$\text{et } p_j = 0, \; p_k = 1 \text{ pour quelques } j, k\}$$

Chaque p_i désigne la valeur d'utilité de choix i. De plus, l'espace des préférences cardinales considéré maintenant contient aussi la préférence nulle, i.e. la préférence qui donne la même valeur d'utilité à tous les choix, représentée par le vecteur $\{0\} = (0, \ldots, 0)$.

L'espace des préférences cardinales Q est donc $Q = R \cup \{0\}$. Cet espace a deux composantes convexes. Une définition analogue est donnée pour l'espace des préférences cardinales avec des alternatives dénombrables. L'espace Q dans ce cas est un sous-ensemble d'un espace de Banach, de suites dénombrables [8]. Le problème de l'agrégation adéquate des préférences cardinales est formalisé par des fonctions $\phi : Q^k \to Q$ où k est le nombre fini des agents de l'économie. Remarquons que la préférence sociale peut être indifférente parmi tous les choix.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 6

Si l'espace des alternatives est fini, il n'existe pas de règle de choix social ϕ continue, définie sur l'espace des préférences cardinales $\phi : Q^k \to Q$ qui respecte l'anonymité et l'unanimité. Ce résultat est aussi valable pour les fonctions d'utilité de von Neumann-Morgenstern.

Le résultat est démontré dans [8] ; il s'obtient en étudiant les propriétés topologiques de l'espace des préférences cardinales. On en déduit qu'avec un nombre fini d'alternatives (X est un ensemble fini) une des composantes connexes de l'espace Q est homéomorphe à une sphère de $\mathbf{R}^n$ et n'est donc pas topologiquement trivial. Par contre avec un nombre infini d'alternatives (X infini), cette composante connexe de Q est homéomorphe sous certaines hypothèses à la sphère unité d'un espace de Banach B de dimension infinie, donc est topologiquement trivial, car il a été prouvé que la sphère unité de B est en fait contractible (voir par exemple [25]). D'après [8] ceci est suffisant pour obtenir le résultat sous les hypothèses du théorème 6.

Théorème 7

Si les alternatives sont en nombre infini, il existe une règle continue anonyme pour préférences cardinales $\phi : Q^k \to Q$ *respectant l'unanimité. Cependant une telle règle est la limite des règles dictatoriales, et est topologiquement équivalente à une règle dictatoriale. Ce résultat est aussi valable pour les fonctions d'utilité de Von Neumann-Morgenstern.*

Le résultat du théorème 7 choque vraiment l'intuition et il dérive lui-même d'un fait moins qu'intuitif : les sphères unités des espaces de Banach sont contractibles (topologiquement triviales). Cette contractibilité des composantes de l'espace des préférences est la clé des résultats d'existence comme nous l'examinerons plus loin dans cette section.

Remarquez que les résultats de ce paragraphe sont significativement différents de ceux présentés dans les paragraphes a), b) et c) puisque dans ces derniers l'espace des alternatives est le cube unité X alors qu'ici X est au plus dénombrable. Si X est fini, l'espace des préférences cardinales Q est de dimension finie et si X est infini, Q est de dimension infinie. La structure des espaces de préférences Q est nettement différente de celle de P, l'espace des paragraphes précédents.

Des recherches ultérieures sur la topologie des espaces de préférences avec intensités et comparaisons interpersonnelles devraient être fructueuses. Elles comprendraient l'étude de la topologie des espaces d'orbites sous l'action des groupes de Lie classiques.

e) Choix social avec des populations infinies

Comme nous l'avons expliqué dans le précédent paragraphe, les cas en dimension infinie introduisent une différence importante. Le problème précédent apparaissait à cause de l'introduction des intensités de préférences qui modifiaient la structure de l'espace des préférences de façon non triviale. Dans ce paragraphe, nous considérons des préférences ordinales comme dans a), b) et c) mais les populations sont larges, c'est-à-dire contiennent un nombre infini d'agents. L'espace des préférences est alors, en toute alternative x de X, de dimension infinie. Et cette dimension infinie entraîne à nouveau, bien que pour des raisons assez différentes, des résultats contre-intuitifs : on peut prouver l'existence de règles continues de choix social satisfaisant les conditions de Pareto et d'absence de dictature ; en fait on peut même les construire. Ces règles apparaissent cependant comme des limites de règles dictatoriales. Comme un courant de la littérature traite ce problème, il est intéressant de noter que les résultats donnés ici sont reliés aux résultats antérieurs de Fishburn [21], Kirman et Sondermann [23], Brown [3] et autres mais qu'ils sont en fait assez différents. Les règles construites ici sont continues et les préférences complètes (les individuelles et les collectives), données par des champs de vecteurs C^1 définis sur un espace d'alternatives euclidien (tel que le cube unité de $\mathbf{R}^n$) comme en a), b) et c).

Par contre les résultats de [21] et [23] portent essentiellement sur des règles définies pour des espaces d'alternatives finis et satisfaisant à l'axiome d'Arrow d'indépendance des alternatives irrélevantes au lieu de la continuité. Les résultats présentés dans ce papier sont en fait suffisamment différents pour que, par exemple, les règles de choix social construites ici soient continues sur les préférences individuelles, c'est-à-dire structurellement stables, alors que dans les travaux antérieurs elles ne le sont pas en général. La figure 7 illustre ce point.

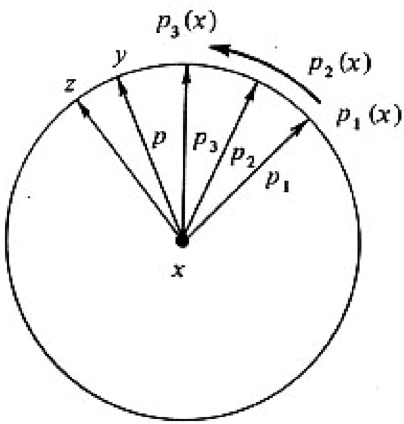


Fig. 7

Théorème 8

Soit $\mathbf{P}^\infty = \prod_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}$ *l'espace des profils d'une infinité dénombrable d'agents sur un espace d'alternatives* X *; l'espace des préférences ordinales* P *et l'espace d'alternatives* X *sont tous deux définis comme dans le théorème 1. Alors la règle* $\phi(p_1, \ldots, p_k, \ldots) = \lim_{k \to \infty} \{p_k\}$ *définit une règle continue, Pareto et non dictatoriale.*

Si la suite des vecteurs $\{p_i(x)\}$ a une limite dans $\mathbf{R}^n$ pour tout x de X, la limite définissant ϕ s'entend au sens habituel. Sinon, elle est prolongée, en tout point x de X, en une limite le long d'un *ultrafiltre libre de* l'ensemble des entiers $\{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$. (Voir dans [17] les définitions). D'après [17], une telle limite existe toujours et la règle ϕ ainsi définie est continue, Pareto et non dictatoriale.

Dans la figure 7, $p(x) = \lim_i p_i(x)$ est le vecteur image de la suite $\{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), \ldots\}$ par une fonction ϕ définie comme dans le théorème 8. Ainsi dans cette construction les choix y et x sont indifférents pour p. Par contre, dans [21] et [23] la préférence finale est choisie de façon à ce que les coalitions gagnantes soient les parties d'un ultrafiltre libre F. Si F est un ultrafiltre libre sur les entiers N dont les parties contiennent les complémentaires des parties finies de **N**, alors la préférence collective associée à cette même suite de préférences préférera strictement y à x d'après les règles de [21] et [23] et donc elle sera distincte de la limite des $p_i(x)$. Remarquez que les règles de [21] et [23] sont en fait discontinues puisqu'elles préfèrent strictement x à tout point z à gauche de y sur le cercle alors que x est préféré strictement par tout point à droite de y et par y.

f) Conditions nécessaires et suffisantes de résolution du paradoxe : contractibilité et «Single Peakedness»

Les résultats présentés ci-dessus montrent que sans restrictions sur les préférences des agents, le paradoxe de choix social ne peut pas être éliminé. Une voie traditionnelle pour étudier des conditions résolvant le paradoxe est de limiter l'ensemble admissible des préférences de chaque agent, c'est-à-dire de restreindre le domaine des préférences. En fait, la première étude de telles conditions fut l'article pionnier de Black [2]. Il y introduisait la condition de «single peakedness» qui signifie que l'on peut ordonner l'ensemble (fini) des alternatives sur une ligne de façon à ce que chaque agent –qui a une seule alternative préférée appelée pic– classe les alternatives à droite et à gauche de ce pic en fonction décroissante de leur distance au pic. Le paradoxe n'existe pas sous cette condition. Elle fut généralisée plus tard à des espaces d'alternatives euclidiens (voir Kramer [24]) et resta la seule condition suffisante (pour éliminer le paradoxe) vraiment utilisée.

Dans un autre papier, Chichilnisky et Heal [15] prouvèrent qu'une restriction topologique est par contre nécessaire aussi bien que suffisante à la résolution du paradoxe dans l'approche suivie ici. Cette restriction est la trivialité topologique de l'espace des préférences, c'est-à-dire sa contractibilité. Ceci signifie que le paradoxe de choix social n'existe pas si et seulement si l'espace des préférences admissibles à chaque agent peut être déformé continument en une seule préférence ou encore de façon équivalente si et seulement si l'espace des profils de préférences peut être déformé continument en sa «diagonale» (c'est-à-dire le sous-ensemble des profils constitués des mêmes préférences pour tous les agents). Cette condition est donc une unanimité topologique. Ce résultat implique que seule une résolution triviale peut être trouvée au paradoxe du choix social. La relation entre cette condition et celle de «single peakedness» de Black sera examinée après les résultats suivants.

Théorème 9

Soit R une variété représentant le domaine (restreint) des préférences individuelles. Une règle continue $\phi: R^k \to R$ qui respecte l'anonymité et l'unanimité existe si et seulement si R est contractible.

Voir dans [15] une démonstration de ce théorème. Plusieurs exemples d'espaces contractibles sont donnés dans [15]. La figure 8 ci-dessous en donne un simple.

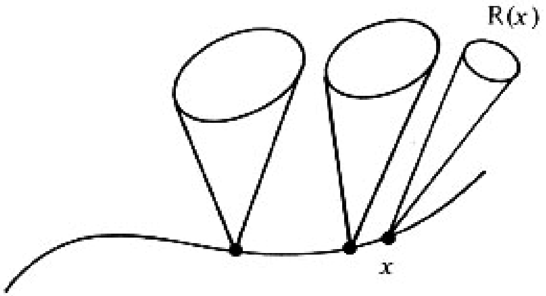


Fig. 8. – En toute alternative x de X, les directions des vecteurs $p(x)$ varient, lorsque p décrit R, dans un ensemble contractible de S^1 au lieu de décrire S^1 tout entier. Par conséquent, on peut construire une règle de choix social admissible continue, anonyme et respectant l'unanimité.

Il est intéressant de noter l'équivalence topologique entre toute règle de choix social satisfaisant les conditions du théorème 9 et la règle d'addition convexe. Soit R l'espace des préférences individuelles restreintes. Nous avons alors :

Corollaire 10

Toute règle continue de choix social ϕ : $R^k \to R$ *anonyme et respectant l'unanimité est topologiquement équivalente à la règle*

$$(p_1, \ldots, p_k) = \sum_{i=1}^{k} p_k/k.$$

Ce résultats se déduit du théorème 9 parce que ϕ existe sous les hypothèses du corollaire et, R étant contractible, deux applications de R^k dans R sont homotopes. Cette règle d'addition convexe peut s'interpréter comme un cas particulier de la fonction de bien-être social de Bergson-Samuelson si l'on se donne une représentation d'utilité propre et continue des préférences (c'est-à-dire une application continue, globalement définie sur les préférences, à valeur dans l'espace des fonctions réelles). Grâce à des arguments de la théorie de l'obstruction, on peut montrer qu'une telle représentation continue $R : R \to U$ existe toujours lorsque l'espace des préférences R est contractible. Voir aussi dans [4] et [6] un examen du problème de la représentation.

Malgré les différences évidentes entre la condition suffisante de «single peakedness» de Black et la condition, topologique, de contractibilité de Chichilnisky-Heal, elles sont en fait topologiquement équivalentes au sens suivant :

Théorème 11

Une déformation continue de l'espace des préférences R *satisfait à la condition de «single peakedness» si et seulement si* R *est contractible.*

Voir dans [10] une démonstration.

3. THEORIE DES JEUX

La structure de base de la théorie des jeux est assez similaire à celle du choix social. Un *jeu* est composé d'une part d'une application qui associe une issue à tout *k*-uple de stratégies des jouers, autrement dit d'une application de l'espace produit S^k des stratégies des k joueurs dans l'espace A des issues $g : S^k \to A$, et d'autre part des préférences individuelles sur les issues (1). Les propriétés de telles applications de jeu g forment le principal sujet de la théorie des jeux de même que l'étude des applications $\phi : P^k \to P$ où P est l'espace des préférences constitue celui de la théorie du choix social.

Une différence essentielle provient du fait que les agents participant à un jeu connaissent l'application g et choisissent donc leur stratégie en conséquence. A l'opposé, dans les problèmes traditionnels de la théorie du choix social l'application ϕ est seulement connue du planificateur ; les individus simplement annoncent leur préférence. Les propriétés d'une application de choix social concernent donc essentiellement le planificateur et les axiomes ou conditions exigés d'elle sont du domaine de la justice. Les propriétés d'une fonction de jeu g intéressent par contre directement chaque joueur : chacun choisit son coup stratégiquement en vue de maximiser (d'après sa préférence) la valeur des issues en tenant compte du comportement des autres joueurs.

Cependant un lien direct entre les deux sujets apparait lorsque le problème de la manipulabilité du choix social est soulevé. Dans ce cas les

(1) La fonction $g : S^k \to A$ est appelée une *forme de jeu*.

agents sont supposés choisir stratégiquement les préférences annoncées au planificateur dans le but d'influencer la valeur de l'issue (la préférence collective) évaluée en fonction de leur propre préférence. Par exemple, grâce à l'introduction d'une notion adéquate de distance une manipulation individuelle de la règle de choix social peut consister en une révélation fausse de sa préférence de façon à rapprocher le plus possible la préférence collective de la sienne. Cette section traitera précisément de ces problèmes. Une part importante de la littérature existe dans ce domaine mais n'est pas ici passée en revue. Voir des références dans [18].

Une première différence technique entre les théories des jeux et du choix social est que l'espace des issues A d'un jeu peut être différent de l'espace des préférences, c'est-à-dire une règle de choix social est définie de P^k dans P, $\phi : P^k \rightarrow P$, alors qu'un jeu l'est de S^k dans A $g : S^k \rightarrow A$ où A n'est pas nécessairement égal à S. Une règle de choix social est donc une forme de jeu d'un type particulier. Cette différence peut ne pas être trop fondamentale, puisque les propriétés des applications définies sur le produit répété k fois d'un espace et à valeur dans lui-même renseignent sur les propriétés des applications d'un espace produit dans d'autres espaces nature assez simple comme les espaces d'issues.

Une seconde différence est introduite par l'apparition des notions d'équilibre en théorie des jeux. Ceci déplace en général l'importance de la topologie algébrique dans le problème vers la géométrie ou au moins la topologie différentielle, car les notions d'équilibre reposent en général sur des maximisations.

a) Manipulabilité des jeux

Comme nous le verrons dans la suite, en général la manipulation d'une règle de choix social ou plus généralement d'un jeu est souvent un problème de nature topologique, par contre l'existence et les propriétés des équilibres s'étudient mieux avec des outils différentiables. Sous certaines hypothèses cependant, les propriétés topologiques serviront à étudier l'existence et les propriétés d'un équilibre. En particulier, d'après le théorème 12 ci-dessous certains jeux possèdent un équilibre de Nash seulement si ils sont manipulables d'une façon inéquitable, par exemple ils sont manipulables par un joueur et non par les autres. Un équilibre de Nash étant une solution non coopérative d'un jeu, la notion d'inéquité apparait ainsi étroitement reliée à celle de non-coopération. Il faut donc avoir recours aux solutions coopératives si l'équité est souhaitée.

Dans la suite nous étudions des jeux dans lesquels les stratégies des joueurs consistent à annoncer leur préférence et les issues sont des préférences aggrégées. Comme nous allons le définir, la préférence de chaque agent sur l'espace des issues est donnée par une fonction distance à sa vraie préférence. Les agents, qui connaissent la structure du jeu ont la possibilité de ne pas révéler stratégiquement leur vraie préférence afin de biaiser l'issue en leur faveur. L'issue du jeu étant une préférence collective, le jeu a une forme plus générale que d'habitude puisqu'une issue appartenent à n'importe quel espace d'issues A se déduira naturellement de la maximisation de la préférence collective obtenue en jouant g sur l'espace A. Le jeu induit est ainsi la composition $h = g o \mathrm{M}$ où $h : \mathrm{P}^k \xrightarrow{g} \mathrm{P}^{\mathrm{M}} \rightarrow \mathrm{A}$, c'est-à-dire $h : \mathrm{P}^k \rightarrow \mathrm{A}$ est obtenu en jouant d'abord le jeu g puis en maximisant le critère M sur la préférence collective qui résulte du jeu g. Le résultat suivant se démontre dans [7] en utilisant des outils de la théorie d'homotopie.

Théorème 12

Si $g : \mathrm{P}^k \rightarrow \mathrm{P}$ est un jeu continu qui respecte l'unanimité, soit il est dictatorial, soi il existe un agent manipulateur fort c'est-à-dire un agent qui peut obtenir exactement n'importe quelle issue désirée en annonçant des fausses préférences. De plus, le manipulateur fort est unique si le jeu est Pareto.

Formellement le premier joueur est un *manipulateur fort* si pour tout q annoncé par le second joueur il existe $\overline{p}$, une stratégie du premier joueur telle que $\phi(\overline{p}, q) = p_1$ où p_1 est la vraie préférence du premier joueur.

Un cas particulier de ce résultat se démontre sans la théorie d'homotopie, comme dans Chichilnisky et Heal [16] ; je résume maintenant la ligne directrice de la démonstration en utilisant des résultats du précédent paragraphe. Ceci établira clairement le lien entre la manipulation des jeux et l'existence de paradoxes du choix social.

Comme nous l'avons vu dans la section 2 si les votants sont au nombre de deux et s'ils ont des préférences linéaires sur un espace d'alternatives de dimension 2 alors le jeu est une fonction $g : \mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1 \rightarrow \mathrm{S}^1$. D'après la démonstration du théorème 1 le respect de l'unanimité implique que $g/\Delta : \Delta \rightarrow \mathrm{S}^1$ vérifie $\deg(g/\Delta) = 1$ si Δ est la diagonale de $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^1$. Ceci entraîne en particulier, comme dans le théorème 1, $\deg(g/\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1$ puisque la diagonale est déformable en $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$; A et B étant des cercles, $\deg(g/\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \deg(g/\mathrm{A}) + \deg(g/\mathrm{B})$. Par conséquent, $\deg(g/\mathrm{A})$ et $\deg(g/\mathrm{B})$, de somme égale à 1, ne sont pas tous les deux nuls. La seconde partie de la démonstration consiste à montrer que le premier votant est un manipulateur fort dès que $\deg(g/\mathrm{A}) \neq 0$. Ceci est expliqué en détail [7]. Rappelons que $\mathrm{A} = \{(p, p_0) : p \in \mathrm{S}^1\}$. Donc si $\deg(g/\mathrm{A}) \neq 0$, pour tout q de S^1, il existe $p \in \mathrm{S}^1$ tel que $g(p, p_0) = q$; en effet le degré de g sur A est nul sauf si l'image de g restreinte à A est S^1 tout entier. Le premier agent peut donc entièrement manipuler l'issue *dans* A, c'est-à-dire que si la préférence annoncée par le second votant est p_0, le premier a la possibilité (notés p ci-dessus) d'obtenir exactement n'importe quelle issue q, ($q = g(p, p_0)$ pour certain $p \in S^1$).

Il reste à prouver que la même propriété est vraie pour toute autre préférence $\overline{p}_0$ choisie par le second agent. Or il suffit que deg $(\phi/\overline{A}) \neq 0$ pour tout ensemble $\overline{A}$ de la forme

$\overline{A} = \{(p, \overline{p}_0) : p \in S^1\}$, $\overline{p}_0$ étant un vecteur de S^1. La démonstration se trouve dans [7].

Pour ce qui est de l'unicité du manipulateur fort lorsque g est Pareto, nous rappelons que dans ce cas deg (g/A) et deg (g/B) sont tous deux positifs et au plus égaux à 1. (Voir section précédente). Donc, puisque deg $(g/A \cup B) = 1$, un seul des degrés, deg (g/A) et deg (g/B), est égal à 1 et l'autre à 0. Aussi, il existe un seul manipulateur fort, parce que G est Pareto.

On peut maintenant introduire une notion d'équité pour des jeux à deux joueurs(1). Un tel jeu $g : P^2 \to P$ est *équitable* si ou bien chacun des deux joueurs ou bien aucun des deux est un manipulateur fort. Un exemple typique de jeu à un manipulateur fort est la fonction dictatoriale (projection) $g(p, q) = p$, $\forall p,\ q \in S^1 \times S^1$. La figure 9 ci-dessous donne un autre exemple de jeu à un manipulateur. Remarquez que seul le premier agent peut toujours trouver une stratégie p (pour toute stratégie q du second) qui lui permet d'atteindre son issue préférée.

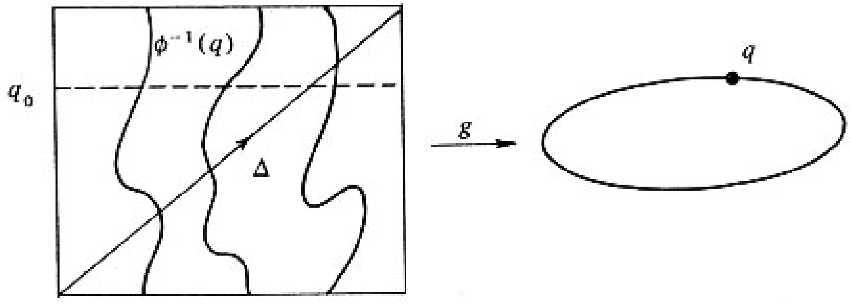


Fig. 9. – Les lignes courbes dans la figure de gauche indiquent trois hypersurfaces de l'application $g : S^1 \times S^1 \to S^1$; par hypothèse g satisfait à l'unanimité si bien que $g/\Delta = 1$. Par conséquent, pour tout q de S^1, $g^{-1}(q) \neq \phi$. Notez que, pour tout q et tout q_0, il existe p tel que $g(p, q_0) = q$.

D'après ce qui précède, il est évident que le manipulateur fort choisit une stratégie qui lui assure, en considérant la stratégie de l'autre comme donnée, son issue préférée. Ceci fait référence à un concept d'équilibre

(1) Un jeu constitutionnel est donné par une fonction de jeu définie sur les k-uples de préférences P^k à valeur dans P. Les préférences des joueurs sur les issues (éléments de P) sont fonctions décroissantes de la distance à leurs propres préférences.

pour lequel les stratégies optimales ne le sont que pour une structure d'information particulière. Le cas présent correspond au concept d'équilibre de Nash puisque le manipulateur fort choisit une stratégie de maximisation de la valeur de l'issue en supposant donnée la stratégie du second joueur. Le résultat établit donc qu'aux équilibres de Nash du jeu, le manipulateur fort est un «dictateur stratégique» au sens où il peut toujours obtenir son issue désirée (2). Voir dans [16] une discussion sur les relations entre ces résultats et les résultats antérieurs.

Dans la suite j'explorerait brièvement d'autre cas.

La figure 10 ci-dessous est un exemple de jeu à deux manipulateurs forts. On vérifie facilement que toute hypersurface du jeu intersecte toutes les parallèles horizontales et verticales et que la fonction définissant le jeu est surjective sur S^1. Remarquez que ce jeu ne peut être Pareto car alors il n'existerait qu'un seul manipulateur d'après le résultat précédent.

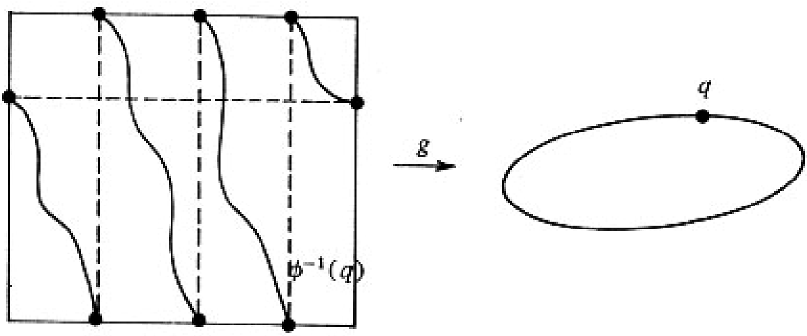


Fig. 10. — La réunion des quatre courbes sur la partie gauche de la figure représente une hypersurface du jeu g, $g^{-1}(q)$.

b) Inéquité et existence d'un équilibre de Nash

Comme nous l'avons montré dans l'exposé du théorème 12, l'existence d'un manipulateur fort est une question topologique : essentiellement une propriété de degré du jeu sur certaines sous-variétés.

Le concept d'équilibre de Nash est par contre en principe géométrique puisqu'il repose sur une maximisation : un couple de stratégies $(\bar{p}, \bar{q})$ de

---

(2) Le concept de manipulabilité utilisé ici est assez différent de celui de Vickrey [30], Gibbard [22], Satterthwaite [26], Feldman [20] et les autres. Dans ceux-ci, l'accent est mis sur la fausse révélation et ici sur la possibilité d'obtenir toute issue désirée. De plus dans Gibbard un jeu est manipulable si une stratégie dominante n'existe pas (et alors la vérité en particulier n'est pas une stratégie dominante) ; les équilibres de Nash ne sont pas considérés.

P^2 est un équilibre de Nash si $(\bar{p}, \bar{q})$ maximise la préférence du premier agent sur toutes les stratégies de la forme $(p, \bar{q})$ pour $p \in P$ et $(\bar{p}, \bar{q})$ maximise la préférence du second sur toutes les stratégies $(\bar{p}, q)$ pour $q \in P$. Formellement, $(\bar{p}, \bar{q})$ est un équilibre de Nash si

$$u_1(\bar{p}, \bar{q}) = \max_{p \in P} u_1(p, \bar{q})$$

et

$$u_2(\bar{p}, \bar{q}) = \max_{q \in P} u_2(\bar{p}, q)$$

si u_1 et u_2 sont des utilités représentant les préférences du premier et du second joueur respectivement. Le résultat suivant établit donc une relation entre un concept topologique et un concept géométrique. La démonstration se trouve dans [16]. Soient $P = S^1$ (c'est-à-dire l'espace des alternatives est de dimension 2) et $g : S^1 \times S^1 \to S^1$ un jeu. Supposons que g respecte l'unanimité et que les préférences individuelles sur les issues (les préférences collectives) sont données par la distance euclidienne à leur vraie préférence. On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 13

Le jeu g possède un équilibre de Nash seulement si il est inéquitable.

La nécessité se déduit aisément du dernier résultat : si le jeu est équitable alors soit chacun soit aucun des deux joueurs peut manipuler l'issue. Le second cas est impossible puisque g respecte l'unanimité (voir théorème 12). Dans le premier cas où les deux joueurs peuvent manipuler le jeu, il est facile de vérifier qu'aucun équilibre de Nash n'existe, voir [16].

La démonstration de [16] établit aussi que sous certaines hypothèses la condition d'inéquité est suffisante pour l'existence d'un équilibre de Nash. Remarquons, dans le cas inéquitable, la fonction de réaction de l'unique manipulateur fort c'est-à-dire la courbe des réponses optimales aux stratégies choisies par l'autre joueur, est exactement la courbe donnée par l'image réciproque de son alternative préférée. Si, sans resteindre le problème, nous supposons le premier joueur être le manipulateur fort, alors la fonction de réaction de ce joueur dans l'espace des stratégies est $g^{-1}(p_1) \subset S^1 \times S^1$ où p_1 est son issue préférée, voir figure 11 ci-dessous.

c) Duopoles de Cournot et de Stackelberg

Les résultats précédents montrent qu'un équilibre de Nash existe dans les jeux considérés dans ce papier si et seulement si le jeu inéquitable. On peut maintenant construire un jeu de duopole qui satisfait les conditions

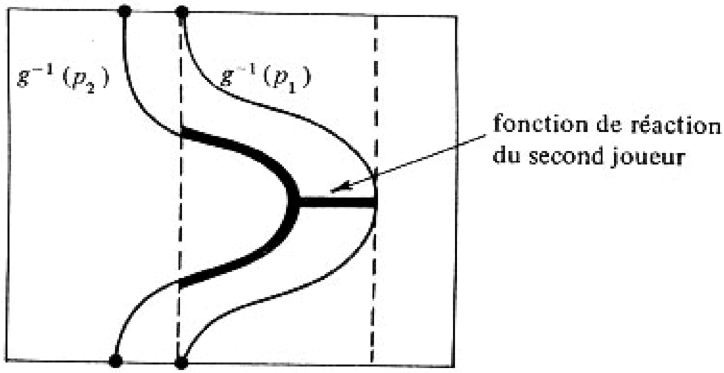


Fig. 11. – La fonction de réaction du manipulateur fort est $g^{-1}(p_1)$, une partie de celle du second joueur est dessinée en traits épais : un segment de la variété $g^{-1}(p_2)$ et une ligne horizontale qui constituent l'ensemble des points de tangentes verticales des hypersurfaces ; ces points minimisent, étant donné une stratégie du premier joueur la distance à l'issue préférée p_2 de S^1. Notez que la stratégie du premier joueur appartient toujours à $\pi_1(g^{-1}(p_1))$ car, sinon, il/elle obtiendrait une moins bonne issue.

déjà introduites (1). L'espace des préférences P des paragraphes précédents doit alors être remplacé par l'espace des modifications d'output de chaque producteur à partir d'un vecteur initial d'output de $\mathbf{R}^n$.

Dans le modèle de duopole de Cournot, la solution est un équilibre de Nash du jeu : chaque duopoliste considère l'output de l'autre pour donné et choisit stratégiquement sa quantité (en fonction de sa préférence) en vue de maximiser son paiement. L'output total des deux joueurs détermine le prix du marché conjointement avec la demande. Par conséquent, un équilibre de Nash défini dans le paragraphe b) est, s'il est convenablement réinterprété, une solution de Cournot du jeu de duopole.

Une solution de duopole de Stackelberg suppose par contre une asymétrie fondamentale : un joueur est le «leader», l'autre le «follower». Le follower choisit sa quantité pour maximiser sa préférence en supposant le comportement de l'autre donné. A l'opposé le leader connait par hypothèse la fonction de réaction du follower et il choisit en conséquence la réponse qui maximise son utilité. On peut représenter la différence entre les deux solutions (de Cournot et de Stackelberg) dans l'espace des quantités (c'est-à-dire de contrôle) des deux joueurs. La solution de Cournot est donnée par

(1) Remarquons que la condition de respect de l'unanimité est suffisante mais pas nécessaire pour obtenir le théorème 12 : on peut la remplacer par la condition que la dérivée Dg du jeu g soit toujours positive sur Δ.

l'intersection des deux fonctions de réaction, chacune étant le lieu des points à tangentes verticales et horizontales aux courbes d'égale valeur, c'est-à-dire, aux hypersurfaces des préférences des joueurs. Dans le cas de Stackelberg le point choisi est un point sur la fonction de réaction du follower, le plus proche possible de l'issue préférée du leader ; voir figure 12 ci-dessous.

Les résultats du paragraphe précédent se réinterprète donc ici.

Corollaire 14

Dans les jeux de duopole g vérifiant les conditions du théorème 13 une solution de Cournot existe seulement si elle est aussi une solution de Stackelberg ; de plus, le leader peut obtenir pour issue exactement son issue préférée.

L'interprétation est immédiate. La figure 12 doit maintenant être réinterprétée en remplaçant l'espace des quantités par l'espace S^1 des modi-

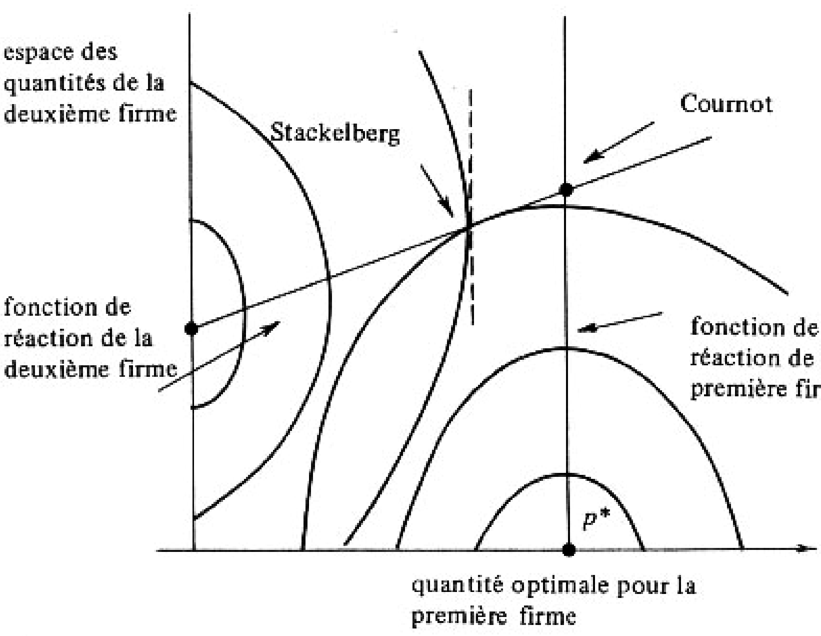


Fig. 12

fications de quantité par rapport à l'état d'origine et en considérant pour préférences les fonctions distances à la quantité finale préférée. Dans la figure 12 ci-dessus, les propriétés topologiques du jeu considéré dans ce corollaire assurent que la fonction de réaction du deuxième joueur passe en fait par p^*, la quantité préférée du leader. Ce dernier est donc capable d'atteindre son issue préférée à l'équilibre.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] ARROW K.J. (1951). – Social Choice and Individual Values. Yale University Press.

[2] BLACK D. (1948). – «On the Rationale of Group Decision Making». *Journal of Potical Economy.*

[3] BROWN D. (1974). – «Aggregation of Preferences». *Quarterly Journal of Economics.*

[4] CHICHILNISKY G. – «Manifolds of Preferences and Equilibria». Project for Efficiency of Decision Making in Economic Systems. Harvard University, (1976).

[5] CHICHILNISKY G. (1982). – «Social Aggregation Rules and Continuity». *Quaterly Journal of Economics.*

[6] CHICHILNISKY G. (1980). – «Continuous Representation of Preferences». *Review of Economic Studies.*

[7] CHICHILNISKY G. (1979). – «A General Result on Strong Manipulability». The Economic Workshop, Columbia University.

[8] CHICHILNISKY G. (1980). – «Intensity of Preferences and von Neuman Morgenstern Utilities». Working Paper, University of Essex.

[9] CHICHILNISKY G. (1979). – «On Fixed Points and Social Choice Paradoxes». *Economic Letters.*

[10] CHICHILNISKY G. (1980). – «Single Peakedness and the Contractibility of Preference Spaces». Working Paper, University of Essex.

[11] CHICHILNISKY G. (1980). – «Social Choice and the Topology of Spaces of Preferences». *Advances in Mathematics.*

[12] CHICHILNISKY G. (1978). – «Spaces of Economic Agents». *Journal of Economic Theory.*

[13] CHICHILNISKY G. (1981). – «The Structural Instability of Decisive Majority Rules». *Journal of Mathematical Economics.*

[14] CHICHILNISKY G. (1979). – «The Topological Equivalence of the Pareto Condition and the Existence of a Dictator», à paraître dans *Journal of Mathematical Economics.*

[15] CHICHILNISKY G. and HEAL G. (1979). – «Necessary and Sufficient Conditions for a Resolution of the Social Choice Paradox», à paraître dans *Journal of Economic Theory.*

[16] CHICHILNISKY G. and HEAL G. (1980). – «Patterns of Power : Bargaining and Implementation in two person games». Discussion Paper, University of Essex.

[17] CHICHILNISKY G. and HEAL G. (1979). – «Social Choice with Infinite Population : Construction of a Rule and Impossibility Results», The Economic Workshop, Columbia University.

[18] CHICHILNISKY G. and HEAL G. – «Incentive Compatibility and Local Simplicity». Working Paper, University of Essex, 1981.

[19] DEBREU G. (1972). – «Regular Economies». *Econometrica.*

[20] FELDMAN A. (1979). – «Manipulation and the Pareto Rule». *Journal of Economic Theory.*

[21] FISHBURN P.C. (1970). – «Arrow's Impossibility Theorem: Concise Proof and Infinite Voters». *Journal of Economic Theory.*

[22] GIBBARD A. – «Manipulation of Voting Schemes: A General Result». *Econometrica.*

[23] KIRMAN A.P. and Sondermann D. (1972). – «Arrow's Theorem, Many Agents and Invisible Dictators». *Journal of Economic Theory.*

[24] KRAMER G.H. (1972). – «On a Class of Equilibrium Conditions for Majority Rule». *Econometrica.*

[25] KUIPER N.H. (1971). – Variétés Hilbertiennes. Aspects Géométriques. Séminaire de mathématiques Supérieures, la Presse de l'Université de Montréal.

[26] SATTERTHWAITE M.A. (1975) – «Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Woting Procedures and Social Welfare Functions». *Journal of Economic Theory.*

[27] SEN A.K. (1970). – Collective Choice and Social Welfare. Holden Day, San Francisco.

[28] SMALE S. (1975). – «Global Analysis and Economics II: A Generalization of a Theorem of Debreu». *Journal of Mathematical Economics.*

[29] SPANIER E. (1966). – Albegraic Topology. McGraw Hill, New York.

[30] VICKREY W. (1960). – «Utility, Strategy and Social Decision Rules». *Quarterly Journal of Economics.*